Краткие сообщения ОИЯИ №10-85 JINR Rapid Communications No.10-85
УДК 539.121.8

САМОСОГЛАСОВАННАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ЛАМИНАРНЫХ ПОТОКОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЗАРЯДА

Ю.И.Алексахин

Дана общековариантная формулировка "самосогласованной электродинамики" Дирака - Бунемана,описывающей релятивистские ламинарные потоки заряженной жидкости. Выведено уравнение для скалярной плотности заряда, обобщающее известное уравнение огибающей параксиального ламинарного пучка. Найдено точное аналитическое решение задачи о равновесии плоского замагниченного потока.

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Self-Consistent Electrodynamics of Space-Charge Laminar Flow

Yu.I.Alexahin

A generally relativistic formulation is given of the Dirac-Buneman "self-consistent electrodynamics", which describes the relativistic laminar flow of charged fluid. An equation for the charge scalar density is derived, generalizing the well-known paraxial laminar beam envelope equation. An exact analytic solution is found to the problem of planar immersed flow equilibrium.

The investigation has been performed at the Department of New Acceleration Methods, JINR.

Предвосхищая современные тенденции в теории элементарных частиц, П.Дирак в работе [1] предложил рассматривать электрический заряд как результат нарушения калибровочной инвариантности электромагнитного поля. Именно, добавление в лагранжиан поля члена вида* $\tilde{\lambda}(q^2 A_i A^i - 1)/2c$, где A^i - 4-потенциал, $\tilde{\lambda}$ - некоторый скаляр, $q = e/mc^2$ - константа, приводит к уравнениям Максвелла с 4-током $j^i = -q^2\tilde{\lambda}A^i$, что позволяет отождествить $-qA^i$ с 4-скоростью потока частиц - источников электромагнитного поля, а $q\tilde{\lambda}/c$ - с их скалярной плотностью заряда ($\tilde{\lambda} = \sqrt{j_i j^i}/q$).

---

* Используется метрика с сигнатурой -2.

Как отмечал Дирак, такой подход дает попутно экономный способ описания ламинарных /скорость - однозначная функция координат/ потоков пространственного заряда - уравнения Максвелла интерпретируются как уравнения для 4-скорости потока u^i, скалярная плотность задается неявно соотношением

$$u_i u^i = 1, \qquad /1/$$

то есть задача сводится к решению системы из пяти уравнений для пяти неизвестных. Распространяя свой метод на завихренные потоки, Дирак ввел две дополнительные скалярные функции /2/, которые, как показал О.Бунеман /3/, являются обобщением переменных Клебша, известных в гидродинамике идеальной жидкости.

Эффективность применения данного метода, названного "самосогласованной электродинамикой" /4/, в теории пучков заряженных частиц продемонстрирована в работе /5/, в которой на основе уравнений для стационарного безвихревого потока было исследовано пинчевание электронного пучка в релятивистском плоском диоде.

Оставляя в стороне вопросы непротиворечивого построения классической электродинамики /1/, примем в качестве исходной систему уравнений Максвелла - Лоренца; предположение ламинарности позволяет с помощью замены $d/ds \to u^i \partial_i$, где $\partial_i \equiv \partial/\partial x^i$, получить из уравнения движения отдельной частицы /6/ уравнение для гидродинамической 4-скорости:

$$u^k (u_{i;k} - q F_{ik}) = 0, \qquad /2/$$

где $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$ - тензор электромагнитного поля, $u_{i;k} = \partial_k u_i - \Gamma^{\ell}_{ik} u_{\ell}$ - ковариантная производная /6/. Введем обобщенную 4-скорость $U_i = u_i + qA_i$ и выразим F_{ik} через ее ковариантный ротор

$$\Omega_{ik} = U_{k;i} - U_{i;k} \qquad /3/$$

/вихревой тензор/ и механическую 4-скорость,

$$q F_{ik} = u_{i;k} - u_{k;i} + \Omega_{ik}. \qquad /4/$$

Учитывая равенство $u^i u_{i;k} = 0$, получаемое дифференцированием /1/, из /2,4/ найдем уравнение

$$u^k \Omega_{ik} = 0, \qquad /5/$$

показывающее, что 4-скорость ортогональна вихревому тензору, и уменьшающее число его независимых компонент до трех. Из первой группы уравнений Максвелла [6] следуют еще четыре соотношения для компонент вихревого тензора:

$$e^{ik\ell m}\,\Omega_{ik;\ell} = 0, \qquad /6/$$

где $e^{ik\ell m}$ - символ Леви-Чивита. Нетрудно убедиться, что уравнения /5,6/ в действительности недоопределяют Ω_{ik} - это следует из инвариантности /6/ относительно замены $\Omega_{ik} \to \Omega_{ik} + \psi_{;i}\chi_{;k} - \psi_{;k}\chi_{;i}$, где ψ, χ - произвольные скаляры. Эта неоднозначность имеет ту же природу, что и градиентная инвариантность электромагнитного поля, и физически несущественна.

Из соотношений /3,5,6/ легко получить обобщение теоремы Кельвина о постоянстве циркуляции на случай релятивистской заряженной жидкости /для псевдоевклидового пространства - времени проведенное в [3]/. Рассмотрим два замкнутых контура C_1 и C_2, которые получаются друг из друга деформацией вдоль мировых линий, образующих "трубку". Обозначим через Σ_0 поверхность трубки, заключенную между контурами, и через $\Sigma_{1,2}$ - натянутые на них поверхности. Интеграл от вихревого тензора по поверхности $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ может быть преобразован в интеграл по охватываемой ею трехмерной гиперповерхности [6]:

$$\oint_{\Sigma} \Omega_{ik}\, df^{ik} = -\frac{1}{2}\oint_{\Sigma} e^{ik\ell m}\,\Omega_{ik}\, df^{*}_{\ell m} =$$

$$= \int e^{ik\ell m}\,\partial_\ell \Omega_{ik}\, dS_m = \int e^{ik\ell m}\,\Omega_{ik;\ell}\, dS_m = 0,$$

где $df^{*}_{ik} = \frac{1}{2} e_{ik\ell m}\, df^{\ell m}$ - относительный тензор, дуальный элементу поверхности $df^{ik} = dx^i dx'^k - dx^k dx'^i$. В силу /5/ вклад в исходный интеграл от поверхности Σ_0 равен нулю, так что интегралы от вихревого тензора по одинаково сориентированным поверхностям Σ_1 и Σ_2 равны друг другу, а стало быть, равны и контурные интегралы

$$\oint_{C_{1,2}} U_i dx^i = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_{1,2}} \Omega_{ik}\, df^{ik} = \mathrm{const}\,. \qquad /7/$$

Таким образом, вывод о постоянстве циркуляции обобщенной 4-скорости [3] справедлив и в общем случае пространства с ненулевой кривизной. Этот результат имеет важное следствие - если на некоторой нехарактеристической гиперповерхности циркуляция отсутствует, то $\Omega_{ik} = 0$ всюду в потоке.

Представляя 4-ток в виде $j^i = q\tilde{\lambda} u^i = c\lambda u^i / 4\pi q$, из второй группы уравнений Максвелла [6] получим уравнение для

4-скорости потока:

$$g^{k\ell}u_{i;k;\ell} - u^{k}_{;i;k} + g^{k\ell}\Omega_{ik;\ell} = -\lambda u_i\,, \qquad /8/$$

где g_{ik} - метрический тензор. Уравнения /1,5,6,8/ и составляют систему уравнений самосогласованной электродинамики, описывающую движение ламинарных потоков заряженной жидкости. Существенным недостатком этой системы является отсутствие уравнения, явно определяющего скалярную плотность λ.

Переходя к выводу соответствующего уравнения, заметим, что из уравнения непрерывности $j^{k}_{;k} = 0$ следует $u^{k}_{;k} = -u^{k}\partial_k \ln\lambda$, а из равенств /1,5/ - соотношения $u_i u^{i}_{;k;\ell} = -u_{i;\ell}u^{i}_{;k}$ и $u^{i}\Omega_{ik;\ell} = -\Omega_{ik}u^{i}_{;\ell}$. Меняя теперь во втором слагаемом в /8/ порядок дифференцирования по правилу $u^{k}_{;i;k} = u^{k}_{;k;i} + u^{k}R_{ik}$, где R_{ik} - тензор Риччи /6/, и сворачивая /8/ с u^{i}, получим искомое уравнение

$$(u^{i}\partial_i)^2\ln\lambda + \lambda = (u_{i;k} + \Omega_{ik})u^{i;k} + u^{i}u^{k}R_{ik}\,, \qquad /9/$$

образующее вместе с /5,6,8/ полную систему дифференциальных уравнений; равенство /1/ налагает связь на начальные значения компонент 4-скорости и может рассматриваться как интеграл этой системы.

Соотношение /5/ показывает, что вихревой тензор представим в форме

$$\Omega_{ik} = \sqrt{-g}\,\lambda\, e_{ik\ell m}\, u^{\ell}\mu^{m}\,, \qquad /10/$$

где μ^{i} - некоторый 4-вектор, $g = \det g_{ik}$. Из /6/ и уравнения непрерывности $(\lambda u^{i})_{;i} = 0$ следует уравнение для вектора μ^{i}:

$$u^{k}\mu^{i}_{;k} - u^{i}u_j u^{k}\mu^{j}_{;k} = \mu^{k}u^{i}_{;k}\,.$$

Легко видеть, что это уравнение определяет только составляющую вектора $w^{i} = u^{k}\mu^{i}_{;k}$, нормальную 4-скорости, продольную же составляющую без ограничения общности можно положить равной нулю - общий случай $u_i w^{i} = \alpha$, где α - произвольный скаляр сводится к рассматриваемому $(u_i w^{i} = 0)$ заменой

$$\mu^{i} \to \mu^{i} + \xi u^{i}\,, \qquad /11/$$

где $u^{k}\partial_k\xi = \alpha$, не затрагивающей тензор /10/. Таким образом, для вектора μ^{i} имеем окончательно

$$u^{k}\mu^{i}_{;k} - \mu^{k}u^{i}_{;k} = u^{k}\partial_k\mu^{i} - \mu^{k}\partial_k u^{i} = 0\,, \qquad /12/$$

то есть коммутатор Ли [7] векторов u^i и μ^i равен нулю. Отметим, что уравнение /12/ определяет μ^i по-прежнему с точностью до преобразования /11/, однако теперь скаляр ξ должен быть постоянен вдоль мировых линий: $u^k\partial_k\xi = 0$.

Рассмотрим постановку задачи Коши для системы уравнений /8-10,12/ в предположении стационарности метрики $(\partial_0 g_{ik} = 0)$ и равенства нулю скорости старта частиц с некоторой пространственной поверхности /эмиттера/, выбрав ее в качестве координатной поверхности $x^1 = 0$:

$$u^{\alpha}|_0 = 0, \quad \alpha = 1,2,3; \qquad u^{\circ}|_0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Считая заданной /и конечной/ плотность тока эмиссии $j_э = = c\lambda u^1/4\pi q$, найдем связь между компонентами вектора μ^i и электромагнитным полем на эмиттере. Трехмерные векторы электрического поля E_α и магнитной индукции B_α вводятся соотношениями [6]

$$E_\alpha = F_{0\alpha}, \quad B^\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} e^{\alpha\beta\gamma} F_{\beta\gamma},$$

где $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + g_\alpha g_\beta$ - пространственный метрический тензор, $g_\alpha = g_{0\alpha}/h_0$, $h_0 = \sqrt{g_{00}}$, $\gamma = \det \gamma_{\alpha\beta} = -g/g_{00}$.

Ввиду инвариантности уравнений относительно преобразования /11/, на компоненты μ^i можно наложить одно дополнительное условие, в частности, потребовать $\lambda\mu^1|_0 = 0$. Тогда для остальных компонент при $x^1 = 0$ имеют место соотношения

$$qE_2 = \partial_2 h_0 + \tilde{j}_э\mu^3, \qquad qE_3 = \partial_3 h_0 - \tilde{j}_э\mu^2,$$

$$\sqrt{\gamma}\, qB^1 = \partial_2 g_3 - \partial_3 g_2 - \tilde{j}_э\mu^{\circ}, \qquad /13/$$

где $\tilde{j}_э = \sqrt{-g}\, 4\pi q\, j_э/c = \sqrt{-g}\,\lambda u^1|_0$. Таким образом, в отсутствие гравитационного поля $(h_0 = \text{const}, \vec{g} = 0)$ завихренность потока связана с отличием от нуля тангенциального электрического поля и/или нормальной компоненты магнитной индукции на эмиттере. В наиболее важном для практики случае стационарного потока, стартующего с эквипотенциального эмиттера, замагниченность описывается одной функцией μ°, постоянной вдоль траекторий.

Анализ выражений для остальных компонент электромагнитного поля позволяет выяснить поведение u^i и λ при $x^1 \to 0$. Если $\mu^2|_0 = \mu^3|_0 = 0$, то производные $\partial_1 u_2$, $\partial_1 u_3$ конечны при

$x^1 \to 0$ и определяются тангенциальными компонентами магнитной индукции* $B^{3,2}|_0$; при $E_1|_0 \neq 0$ $u^1 \sim \sqrt{E_1 x^1}$, а в режиме ограничения пространственным зарядом ($E_1|_0 = 0$) справедлив закон Чайлда - Ленгмюра $u^1 \sim (x^1)^{2/3}$. Если хотя бы одна из компонент $\mu^{2,3}|_0$ отлична от нуля, то из $j_э \neq 0$ с необходимостью следует $E_1|_0 \neq 0$, а значения соответствующей компоненты $B^{2,3}|_0$ выпадают из начальных условий. Возможное изменение числа независимых функций, задающих решение, связано с нарушением условий теоремы Коши - Ковалевской вследствие неаналитичности характеристик потока на поверхности $x^1 = 0$.

Альтернативный способ описания завихренных потоков можно получить, вводя переменные Клебша - Дирака /2-4/. Из коммутативности векторных полей u^i , μ^i следует, что их интегральные кривые образуют систему двумерных поверхностей /7/, ортогональных, в силу равенства /10/, тензору Ω_{ik}. Это позволяет ввести скалярные поля ψ , χ, для которых указанные поверхности являются поверхностями уровня и, потребовав неколлинеарности их градиентов, представить вихревой тензор в виде

$$\Omega_{ik} = \psi_{;i} \chi_{;k} - \psi_{;k} \chi_{;i} = (\psi \partial_k \chi)_{;i} - (\psi \partial_i \chi)_{;k} . \qquad /14/$$

Уравнения /6/ при этом удовлетворены тождественно, а уравнения /5/ - в силу постоянства ψ , χ вдоль мировых линий:

$$u^k \partial_k \psi = u^k \partial_k \chi = 0. \qquad /15/$$

Физический смысл новых переменных выясняется при рассмотрении контурного интеграла

$$\oint_C U_i dx^i = \oint_C \psi \partial_i \chi \, dx^i = \oint_C \psi \, d\chi = \int_\Sigma d\psi \, d\chi ,$$

то есть произведение $d\psi \, d\chi$ дает число вихревых "лент" поля обобщенной 4-скорости, пронизывающих соответствующий элемент поверхности Σ /3/. Представление /14/ уменьшает число переменных до семи, однако на практике более удобным часто оказывается представление /10/.

Рассмотрим в качестве примера задачу о стационарном плоском потоке, все характеристики которого зависят только от одной декартовой координаты $y \equiv x^2$, вдоль которой движение отсутствует ($u_2 = 0$). Система уравнений /1,8-10/ в этом случае значительно упрощается:

---

*Поскольку тангенциальные производные компонент $B^{2,3}$ связаны с $\partial_0 E_1$ и $j_э$ соответствующим уравнением Максвелла, выбор этих величин не является вполне произвольным.

$$\gamma^2 = 1 + u_1^2 + u_3^2, \qquad \gamma'' = \lambda\gamma,$$

$$u_1'' - (vu_3)' = \lambda u_1, \quad u_3'' + (vu_1)' = \lambda u_3, \qquad /16/$$

$$\lambda = v(u_1u_3' - u_1'u_3) - \gamma'^2 + u_1'^2 + u_3'^2,$$

где $v = \lambda\mu_0$, $\gamma = u_0$; штрих означает дифференцирование по y. Если $v = \mathrm{const}$, то решение /16/ можно найти аналитически. Нетрудно проверить, что в этом случае система /16/ имеет два первых интеграла

$$\lambda + \frac{v^2\gamma^2}{2} = A, \qquad (\gamma^2 - 1)[(\mathrm{arctg}\,\frac{u_3}{u_1})' + \frac{v}{2}] = B. \qquad /17/$$

Соотношения /16.1/ и /17.2/ позволяют выразить $u_{1,3}$ через релятивистский фактор γ:

$$u_1 = \sqrt{\gamma^2 - 1}\,\cos\phi, \qquad u_3 = \sqrt{\gamma^2 - 1}\,\sin\phi,$$

$$\phi = \phi_0 + \int_0^y \left(\frac{B}{\gamma^2 - 1} - \frac{v}{2}\right)dy', \qquad /18/$$

для которого из /16.2/ и /17.1/ следует уравнение

$$\gamma'' - A\gamma + \frac{v^2}{2}\gamma^3 = 0, \qquad /19/$$

имеющее первый интеграл

$$\gamma'^2 - A\gamma^2 + \frac{v^2}{4}\gamma^4 = -A - B^2 + \frac{v^2}{4}.$$

В наиболее важном случае, когда электрическое поле на одной из границ пучка отсутствует /выберем ее в качестве поверхности $y = 0$, так что $\gamma'|_{y=0} = 0$/, решение уравнения /19/ имеет вид

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \mathrm{sn}^2\left(\frac{\gamma_1 v y}{2}, k\right)}}, \qquad /20/$$

где $k = \sqrt{1 - \gamma_0^2/\gamma_1^2}$, $\gamma_{0,1}^2 = 2[A \mp \sqrt{A^2 - v^2(A + B^2 - v^2/4)}]/v^2$. В пределе $v \to 0$ формулы /18,20/ дают известное решение для безвихревого потока [4]:

$$\gamma = \gamma_0 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, y,$$

$$u_1 = \sqrt{\gamma_0^2 - 1}\, \cos\phi_0 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, y + \sin\phi_0 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, y,$$

$$u_3 = \sqrt{\gamma_0^2 - 1}\, \sin\phi_0 \operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, y - \cos\phi_0 \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, y.$$

Отметим, что для завихренного потока ($v \neq 0$) требование $\lambda \geq 0$ ограничивает возможные значения релятивистского фактора ($\gamma \leq \sqrt{2A}/v$) и, соответственно, толщину пучка.

Для осесимметричного замагниченного потока построить точные аналитические решения намного сложнее, поэтому воспользуемся разложением характеристик потока в ряд по степеням поперечной координаты x^2. Ограничимся случаем сплошного стационарного пучка в евклидовом пространстве, выбрав ортогональную ($g_{\alpha\beta} = -h_\alpha^2 \delta_{\alpha\beta}$) сетку так, чтобы ось пучка ($x^2 = 0$) совпадала с координатной линией x^1, причем $h_1|_{x^2=0} = 1$, а координата x^3 являлась азимутом ($\partial_3 = 0$). Обозначим $\eta = u^1|_{x^2=0}$. Для поперечных составляющих 4-скорости из /8,10/ на оси пучка получим

$$\partial_2 u_2 = \frac{1}{2\lambda}\, \partial_1 (\eta \lambda h_2^2), \qquad 2u^3 = -qB^1 - \mu_0 \lambda \eta \quad . \qquad /21/$$

Из /9,21/ следует уравнение для скалярной плотности при $x^2 = 0$:

$$4\eta^2 \sqrt{\lambda}\, \partial_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) - 2\lambda + \frac{3+\eta^2}{1+\eta^2} (\partial_1 \eta)^2 + (qB^1)^2 - (\mu_0 \lambda \eta)^2 = 0. \qquad /22/$$

Пренебрегая высшими членами разложений по x^2, можно положить

$$\lambda = \frac{4qI}{c\eta R^2}, \qquad /23/$$

где I - ток в пучке, R - его радиус. Подстановка /23/ в /22/ приводит к известному уравнению огибающей параксиального пучка /8/, так что уравнение /9/ можно рассматривать как обобщение последнего на случай непараксиальных пучков. Отметим, что уравнение /22/ является точным, в то время как применимость уравнения огибающей ограничена приближенным характером соотношения /23/.

Литература

1. Dirac P.A.M. Proc.Roy.Soc.A, 1951, 209, p.291.

2. Dirac P.A.M, Proc.Roy.Soc.A, 1952, 212, p.330.
3. Buneman O. Proc.Roy.Soc.A, 1952, 215, p.346.
4. Buneman O. Proc.Cambr.Phil.Soc., 1954, 50, p.77.
5. Goldstein S.A. et al. Phys.Rev.Lett., 1974, 33, p.1471.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. "Наука", М., 1967.
7. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. "Мир", М., 1964, т.2, с.209.
8. Лоусон Дж. Физика пучков заряженных частиц. "Мир", М., 1980, с.193.

Рукопись поступила 12 мая 1985 года.